Die

# NORMALOPERATIONEN

und ihre Anwendung auf eine

## Klasse von Differential-Gleichungen

Ein Beitrag zur Weiterbildung der Operationentheorie

INAUGURAL-DISSERTATION

vorgelegt

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde der
Hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

**EMIL GÖRING**

aus Basel

BASEL

Buchdruckerei Emil Birkhäuser, Elisabethenstrasse 11

1907

Die

# NORMALOPERATIONEN

und ihre Anwendung auf eine

## Klasse von Differential-Gleichungen

Ein Beitrag zur Weiterbildung der Operationentheorie

INAUGURAL-DISSERTATION

vorgelegt

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde der
Hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

**EMIL GÖRING**

aus Basel

BASEL

Buchdruckerei Emil Birkhäuser, Elisabethenstrasse 11

1907

Genehmigt von der mathemat.-naturw. Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag von Herrn Prof. Dr. *H. Kinkelin* und Herrn Dr. *O. Spiess.*

*Basel,* den 12. Januar 1907.

Prof. **F. Zschokke,** Dekan.

MEINEM LIEBEN VATER

IN DANKBARKEIT

GEWIDMET.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546418_0054

# Einleitung.

Liegt die Differentialgleichung

(1.) $$y - ay' = b \cdot x^2$$

vor, so lässt sich ihr ganzes rationales partikuläres Integral $b[x^2 + 2ax + 2a^2]$ nach folgender bekannter symbolischer Methode bestimmen: Man fasst die linke Seite der Differentialgleichung 1) als Resultat der Anwendung der Differentialoperation $(1 - aD)$ auf die Funktion y auf, schreibt also die vorgelegte Differentialgleichung in der Form

$$(1 - aD)(y) = bx^2.$$

Ihre Lösung ist dann symbolisch gegeben durch

$$y = \frac{1}{1 - aD}(bx^2)$$

Entwickelt man $\frac{1}{1 - a \cdot D}$ in die Reihe $(1 + aD + a^2D^2 + a^3D^3 + \cdots)$ und wendet diese auf die Funktion $bx^2$ an, so ergibt sich

$$y = (1 + aD + a^2D^2 + a^3D^3 + \cdots)(bx^2) = bx^2 + aD(bx^2) + a^2D^2(bx^2) + \cdots$$

oder, die Differentiationen ausgeführt,

$$y = bx^2 + 2abx + 2a^2b,$$

die übrigen Glieder verschwinden alle; man erhält also das vorgelegte Integral

$$y = b[x^2 + 2ax + 2a^2].$$

Durch eine kleine Abänderung des Verfahrens kann man nun die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung erhalten. Man betrachte nämlich die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung, also $bx^2$, als *Grenzfunktion* einer unendlichen Reihe von Funktionen, nämlich

$$bx^2 = \lim_{n=\infty} \left[ bx^2 + \frac{c \cdot x^n}{n!\, a^n} \right].$$

Wendet man nun die Reihe

$$(1 + aD + a^2D^2 + a^3D^3 + \cdots)$$

auf die Funktion $\left( bx^2 + \frac{cx^n}{n!\, a^n} \right)$ an, so erhält man

$$(1 + aD + a^2D^2 + \cdots)\left( bx^2 + \frac{c \cdot x^n}{n!\, a^n} \right) = b\,(x^2 + 2ax + 2a^2) +$$

$$+ c \left[ \frac{x^n}{n!\, a^n} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\, a^{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!\, a^{n-2}} + \cdots \frac{x}{a} + 1 \right].$$

Setzt man nun hierin $n = \infty$, so geht die zweite Klammer in die Exponentialfunktion $e^{\frac{x}{a}}$ über; man erhält also dann

$$b\,[x^2 + 2ax + 2a^2] + c \cdot e^{\frac{x}{a}}$$

und das ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1).

Während man also durch direkte Anwendung der Reihe $(1 + aD + a^2D^2 + \cdots)$ auf die Funktion $bx^2$ nur das ganze rationale Integral erhält, erhält man das allgemeine Integral, wenn man unsere Reihe auf die Darstellung der Funktion $bx^2$ als Grenzfunktion

$$\lim_{n=\infty} \left[ bx^2 + \frac{c \cdot x^n}{n!\, a^n} \right]$$ anwendet.

Zur Unterscheidung der beiden Verfahren nenne ich den direkt erhaltenen Wert den *Hauptwert* der auf die Funktion $bx^2$ angewandten Operation $(1 + aD + a^2D^2 + \cdots)$, während ich die Gesamtheit der nach der zweiten Methode erhaltenen Werte den *allgemeinen Wert* und einen einzelnen derselben einen *partikulären Wert* der auf die Funktion $bx^2$ angewendeten obigen Operation benenne. Der Hauptwert dieser Operation ist also *eindeutig* bestimmt, während der allgemeine Wert *unendlich vieldeutig* ist.

Die Funktionentheorie liefert zu obigem ein bekanntes Analogon: Irgend eine Potenzreihe $R(x)$ liefert zunächst der durch sie dargestellten Funktion für irgend ein x nur einen Wert; wird hingegen die Reihe auf allen möglichen geschlossenen Wegen fortgesetzt, so erhält man in der Regel mehrere Werte. Dementsprechend werde unser Verfahren als *analytische Operationsfortsetzung* bezeichnet.

---

## I.

Der Zweck dieser Arbeit ist nun, an einer ausgedehnten Klasse von Differentialgleichungen obige Berechnungsweise anzuwenden.

Als Ausgangspunkt betrachte ich einen linearen Differentialausdruck von der Form

$$z = \sum_{0}^{n}{}_{\mu} \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu} a_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} y^{(\mu)} . \tag{2.}$$

Symbolisch kann dieser geschrieben werden:

$$z = \left[ \sum_{0}^{n}{}_{\mu} \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu} a_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} D^{\mu} \right] (y) , \tag{2a.}$$

wo

$$\sum_{0}^{n}{}_{\mu}\ \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu}\ a_{\mu,\nu}\, x^{\mu-\nu} D^{\mu}$$

eine *Normaloperation $n^{ter}$ Ordnung* genannt werde. Setzt man noch $n = \infty$, so entsteht

$$P = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\ \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu}\ a_{\mu,\nu}\, x^{\mu-\nu} D^{\mu}; \tag{3.}$$

dieses Symbol heisse eine *Normaloperation unendlich hoher* Ordnung. Vorläufig werde dieses Symbol auf *ganze rationale* Funktionen angewandt; dann verschwinden sämtliche Ableitungen, deren Ordnung höher als der Grad der Funktion ist, und von unserm Symbol kommt nur eine *endliche* Gliederzahl in Betracht. Zum Unterschied von später zu definierenden Funktionen werde die so erhaltene Funktion der *Hauptwert* der Normaloperation für die gegebene ganze rationale Funktion $f(x)$ benannt und durch

$$P^*[f(x)]$$

bezeichnet.

Ist

$$y = f(x) = \sum_{0}^{n}{}_{k}\ c_k x^k,$$

so ist

$$P^*[f(x)] = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\ \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu}\ a_{\mu,\nu}\, x^{\mu-\nu} D^{\mu} \left[ \sum_{0}^{n}{}_{k}\ c_k x^k \right],$$

wo die Glieder, für die $\mu > n$ ist, verschwinden. Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$P^*\left[ \sum_{0}^{n}{}_{k}\ c_k x^k \right] = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\ \left[ \sum_{\nu}^{n}{}_{k}\ c_k A_{k,\,k-\nu} \right] x^{\nu}, \tag{4.}$$

wo

$$\sum_{0}^{k}{}_{\omega}\ \frac{k!}{(k-\omega)!}\, a_{\omega,s} = A_{k,s} \tag{5)}$$

$[s = 0, 1, \ldots k]$ gesetzt wurde.

*Der Hauptwert einer Normaloperation für eine ganze rationale Funktion ist also wieder eine solche und zwar eine von nicht höherm Grade.*

Die Gleichung 4) kann nun auch anstatt der Gleichung 3) zur *Definition* der Normaloperationen benützt werden. Aus den darin vorkommenden $A_{k,s}$ werden die in Gleichung 3) enthaltenen $a_{\omega,s}$ bestimmt, indem man das Gleichungssystem 5) nach diesen Grössen auflöst. Man kann aus der Formel 4) die Formel 3) direkt zurückerhalten, indem man in 4) für die Koeffizienten $c_k$ die aus der Mac Laurin'schen Reihe folgenden Werte

$$c_k = k!\, y^{(k)}(0) = k!\, y^{(k)}(x-x) = k! \sum_0^{n-k} s \frac{(-1)^s \cdot x^s}{s!} \cdot y^{(s+k)}(x)$$

auf der rechten Seite einsetzt; für die Koeffizienten $a_{\omega,s}$ ergibt sich dabei der Ausdruck

$$a_{\omega,s} = \sum_0^{\omega-s} \lambda\, (-1)^{\lambda} \frac{(\omega-\lambda)!}{\lambda!} A_{\omega-\lambda,\,s} \tag{6.}$$

Die $A_{k,s}$ sollen die *Parameter* der Normaloperation, die $A_{k,0}$ im besondern ihre *Moduln* heissen. Setzt man noch

$$P^*\left[\sum_0^n k\; c_k x^k\right] = \sum_0^n \nu\; g_\nu x^\nu,$$

so folgt aus 4)

$$g_\nu = \sum_\nu^n k\; c_k A_{k,\,k-\nu}, \tag{7.}$$

und speziell

$$g_n = c_n A_{n,0}. \tag{8.}$$

Verschwindet kein Modul der Normaloperation, so heisse sie eine *eigentliche*, andernfalls eine *uneigentliche* Normaloperation.

Aus 8) ergibt sich nun leicht

Der *Hauptwert* einer *eigentlichen* Normaloperation für eine ganze rationale Funktion ist von *gleichem Grade;* während der Hauptwert einer *uneigentlichen* Normaloperation für eine Funktion $n^{ten}$ *Grades* von *niedrigerem* Grade ist, falls der *Modul* $A_{n,0}$ *verschwindet.*

## II.

Für den Fall, dass die Normaloperation P eine *eigentliche* sei, wollen wir nun untersuchen, für welche *ganze rationale* Funktion y der Hauptwert $P^*(y)$ einer gegebenen [selbstverständlich ganzen rationalen] Funktion z gleich wird.

Zur Lösung dieser Aufgabe bestimmen wir zunächst diejenige Normaloperation $P^{-1}$, die mit P „multipliziert" *Eins* gibt; d. h. man bestimme $P^{-1}$ so, dass die Gleichung

$$P\left\{P^{-1}[\varphi(x)]\right\} = \varphi(x) \tag{9.}$$

für alle in Betracht kommenden Funktionen $\varphi(x)$ erfüllt wird, was durch die Bezeichnung

$$PP^{-1} = 1 \tag{10.}$$

ausgedrückt wird.

Die Operation P soll durch die Parameter $A_{\mu,\nu}$ gegeben sein und für die Operation $P^{-1}$ setze man die Parameter $B_{\mu,\nu}$ an, indem wir in diesem Falle die Normaloperationen durch Gleichung 4) gegeben denken. Weiter sei

$$A_{\mu,0} \gtrless 0 \qquad [\mu = 0, 1, 2, \ldots].$$

Setzt man

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{n} k \; c_k x^k ,$$

so ergibt sich durch doppelte Anwendung der Gleichung 4)

$$P^* P^{*-1} \left[ \sum_{0}^{n} k \; c_k x^k \right] = \sum_{0}^{n} \nu \left\{ \sum_{\nu}^{n} k \left\{ \sum_{k}^{n} \lambda \; c_\lambda B_{\lambda,\ \lambda - k} \right\} A_{k,\ k-\nu} \right\} x^\nu =$$

$$- \sum_{0}^{n} \nu \sum_{\nu}^{n} \lambda \; c_\lambda \left[ \sum_{\nu}^{\lambda} k \; B_{\lambda,\ \lambda - k} A_{k,\ k-\nu} \right] x^\nu$$

Nach der Bedingung 9) ist hingegen

$$P^* P^{*-1} \left[ \sum_{0}^{n} k \; c_k x^k \right] = \sum_{0}^{n} \nu \; c_\nu x^\nu ,$$

also ergibt sich durch Vergleichung

(12.) $$B_{\nu,0} \cdot A_{\nu,0} = 1$$

und

(13.) $$\sum_{0}^{r} s \; B_{\nu + r,\ r-s} A_{\nu + s,\ s} = 0 \qquad [r = 1, 2, \ldots .] .$$

Da

$$A_{\nu,0} \gtrless 0$$

ist, so ergibt sich aus 12)

(14.) $$B_{\nu,0} = \frac{1}{A_{\nu,0}}$$

und aus 13) folgt

(15.) $$B_{\nu + r,\ r} = - \frac{1}{A_{\nu,0}} \sum_{1}^{r} s \; B_{\nu + r,\ r-s} A_{\nu + s,\ s} .$$

Aus 14) lassen sich die Moduln und dann aus 15) die übrigen Parameter der Reihe nach für $r = 1, 2, 3, \ldots .$ der Normaloperation $P^{-1}$ *eindeutig* bestimmen.

Die so bestimmte, übrigens wieder *eigentliche* Normaloperation werde die zu P inverse Operation genannt.

Aus der Gleichung

$$P^*(y) = z\,, \tag{16.}$$

wo also z eine gegebene und y eine zu suchende ganze rationale Funktion und P eine eigentliche Normaloperation ist, ergibt sich als eine ihrer Lösungen

$$y = P^{*-1}(z)\,, \tag{17.}$$

da nach der Bildungsweise von $P^{-1}$

$$P^*\left[P^{-1^*}(z)\right] = z \qquad \text{ist.}$$

Die so erhaltene Lösung ist aber die einzige, denn wäre noch die ganze rationale Funktion $y_1$ eine Lösung der Gleichung 16), so müsste

$$P^*(y_1) - P^*(y) = 0 \qquad \text{sein.}$$

Ist nun

$$y_1 = \sum_0^{n_1} k\ c_{1,k} x^k \qquad \text{und} \qquad y = \sum_0^{n} k\ c_k x^k\,,$$

so ist nach 4)

$$P^*(y_1) - P^*(y) = \sum_0^{n} \nu \left[\sum_{\nu}^{n} k\ c_{1,k} A_{k,k-\nu}\right] x^\nu - \sum_0^{n} \nu \left[\sum_{\nu}^{n} k\ c_k \cdot A_{k\,k-,\nu}\right] x^\nu =$$

$$= \sum_0^{n} \nu \left[\sum_{\nu}^{n} k \left(c_{1,k} - c_k\right) A_{k,k-\nu}\right] x^\nu = P^*(y_1 - y)\,.$$

Es wäre also

$$P^*(y_1 - y) = 0\,.$$

Nun kann hierin $(y_1 - y)$ von Null nicht verschieden sein, sonst müsste, da nach Annahme sämtliche Moduln von

P von Null verschieden sind, nach 8) auch die rechte Seite von 0 verschieden sein. Es ist also

$$y_1 = y;$$

Gleichung 17) liefert also die einzige Lösung von Gleichung 16), d. h.:

***Satz:*** *Unter den angegebenen Bedingungen ist*

$$y = P^{-1^*}(z)$$

*die einzige Lösung von*

$$z = P^*(y).$$

## III.

Um das in der Einleitung skizzierte Verfahren der analytischen Operationsfortsetzung auf die Normaloperationen auszudehnen, schalten wir einige Bemerkungen über *Grenzwerte* von Funktionen ein.

Es sei

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x), \ldots.$$

eine unendliche Reihe von Funktionen, die in einem gegebenen Gebiete G sämtlich *regulär* sind. Gibt es dann im *nämlichen* Gebiete eine *endliche* und *eindeutige* Funktion $y(x)$ von der Beschaffenheit, dass für ein beliebig kleines, aber endliches $\varepsilon$ eine endliche Grösse $\nu$ so bestimmt werden kann, dass

$$|y - y_n| < \varepsilon \tag{18.}$$

ist, wenn $n > \nu$ wird, und zwar für alle x des Gebietes, so sagt man

$y_n(x)$ *konvergiere im Gebiete* G *gleichmässig gegen die Grenzfunktion* $y(x)$ und setzt

$$y = \lim_{n=\infty} y_n \tag{19.}$$

Wir wollen nun beweisen, dass nach unsern Voraussetzungen die Funktion y im Gebiete G *regulär* sein muss.

Im Innern dieses Gebietes kann man um irgend eine Stelle $\alpha$ einen Kreis mit dem endlichen Radius R legen. Auf dem Umfange desselben können die Funktionen y und $y_n$ eine endliche Grösse M nicht überschreiten [die Funktion y nicht, weil sie im Gebiete G endlich sein soll und die Funktionen $y_n$ wegen der Bedingung 18) nicht]. Die $y_n$ sind nun in unserm Kreise regulär, können also auf die Form gebracht werden:

$$y_n = \sum_{0}^{\infty} r \; c_{r,n} (x-\alpha)^r . \tag{20.}$$

Nach dem Satze von Cauchy ist dann

$$|c_{r,n}| < \frac{M}{R^r} . \tag{21.}$$

Die die $y_n$ darstellenden Potenzreihen müssen also auch für unendlich wachsendes n bei endlichem Index r endliche Koeffizienten besitzen, da ja M eine von n unabhängige endliche Grösse ist.

Aus Gleichung 18) folgt anderseits

$$|y_n - y_m| < 2\varepsilon \qquad \left(\begin{matrix} n \geq \nu \\ m \geq \nu \end{matrix}\right),$$

nach dem Satze von Cauchy also wieder

$$|c_{r,n} - c_{r,m}| < \frac{2\varepsilon}{R^r} ,$$

es lassen sich also nach den Grundbetrachtungen über die Convergenz Grössen $c_r$ bestimmen von der Eigenschaft

(22.) $$\left| c_r - c_{r,n} \right| < \frac{2\varepsilon}{R^r} \qquad (n > \nu).$$

In Verbindung mit Gleichung 21) ergibt sich ferner

(23.) $$\left| c_r \right| < \frac{M + 2\varepsilon}{R^r}.$$

Bildet man also die Reihe

$$\sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r,$$

so konvergiert diese innerhalb unseres Kreises. Es ist dann nach Gleichung 20)

$$\sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r - y_n = \sum_0^\infty r \left( c_r - c_{r,n} \right) (x - \alpha)^r,$$

also

$$\left| \sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r - y_n \right| \leqq \sum_0^\infty r \left| c_r - c_{r,n} \right| \cdot \left| x - \alpha \right|^r,$$

also wegen Gleichung 22)

(24.) $$\left| \sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r - y_n \right| < \frac{2\varepsilon}{1 - \frac{|x - \alpha|}{R}} \qquad (n > \nu).$$

Für $|x - \alpha| < R$, d. h. in unserm Kreise stimmt also nach Gleichung 18)

$$\sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r$$

mit der Funktion y überein, da bei unendlich wachsendem $\nu$ mit $\varepsilon$ auch

$$\frac{2\varepsilon}{1 - \frac{|x - \alpha|}{R}}$$

undendlich klein wird.

Die Funktion y lässt sich somit in der Umgebung irgend eines Punktes $\alpha$ im Innern des Gebietes G in eine Potenzreihe entwickeln, d. h.:

***Satz:*** *Der Grenzwert*

$$y = \lim_{n=\infty} y_n$$

*ist bei unsern Voraussetzungen innerhalb G regulär.*

Ferner ist auch bei Beibehaltung unserer Annahmen

(25.) $$\lim_{n-\infty} \left[ D^k \left( y_n \right) \right] = D^k (y) .$$

Es ist nämlich nach Formel 22)

(a.) $$\ldots . c_r - c_{r,n} < \frac{2\varepsilon}{R^r} \qquad (n > \nu)$$

Ferner ist

$$D(y) = D \left[ \sum_0^\infty r \; c_r (x - \alpha)^r \right] = \sum_0^\infty r \; (r+1) \, c_{r+1} (x - \alpha)^r$$

und entsprechend

$$D \left( y_n \right) = \sum_0^\infty r \; (r+1) \, c_{r+1,n} (x - \alpha)^r ,$$

also ist

$$\left| D(y) - D \left( y_n \right) \right| \leqq \sum_0^\infty r \; (r+1) \left| c_{r+1} - c_{r+1,n} \right| \cdot \left| x - \alpha \right|^r .$$

Wegen Gleichung a), die für alle Indizes r gilt, ist also für

$$\left| x - \alpha \right| < R$$

$$D(y) - D \left( y_n \right) < \varepsilon_1 ,$$

wo $\varepsilon_1$ eine mit $\varepsilon$ verschwindende Grösse bedeutet, es ist mit andern Worten

(26.) $$D(y) = \lim_{n=\infty} D \left( y_n \right) .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man Gleichung 25), w. z. b. w.

Sind nun $f_k(x)$ beliebige im Gebiete G reguläre Funktionen und ist wieder

$$y = \lim_{n=\infty} y_n ,$$

so ergibt sich nun unmittelbar

$$(27.) \qquad \sum_0^m{}'_k \, f_k(x)\, y^{(k)} = \lim_{n=\infty} \sum_0^m{}'_k \, f_k(x)\, y_n{}^k .$$

Denn nach Formel 25) ist zunächst

$$y^{(k)} = \lim_{n=\infty} y_n{}^k$$

und daraus folgt nach der Definition der Grenzfunktionen unsere Formel 27).

## IV.

Nach diesen Betrachtungen über die Grenzwerte von unendlichen Funktionenreihen müssen wir uns wieder den Normaloperationen zuwenden, um ihre *allgemeinen* Werte zu definieren.

Ist nämlich P eine beliebige Normaloperation, y eine *ganze Potenzreihe* [mit endlich oder unendlich vielen Gliedern], so stelle man y auf *alle möglichen* Arten als Grenzwert von *ganzen rationalen* Funktionen $y_n$ dar, bestimme dann die Hauptwerte $P^*(y_n)$, die wieder ganze rationale Funktionen

$$z_n = P^*(y_n)$$

sind. Existiert dann für irgend eine der angegebenen Darstellungen der Funktion y der Grenzwert

$$z = \lim_{n=\infty} P^*(y_n),$$

so bezeichne man diese Funktion mit

$$z = P(y) \qquad \text{[ohne Stern]}$$

und nenne sie einen *partikulären* Wert der Normaloperation P für die Funktion y. Die Gesamtheit der so aus der Funktion y erhaltenen Werte heisse man den *allgemeinen* Wert von P für y. Die Operation P(y) ist also im allgemeinen *vieldeutig*, und

$$P^*(y)$$

ist nur ein *besonderer* ihrer partikulärer Werte für eine *ganze rationale* Funktion y.

Das Verfahren, welches also angibt, wie man aus dem Werte P*(y) den allgemeinen Wert P(y) erhält, wollen wir die *analytische Fortsetzung* der *Normaloperationen* nennen.

Aus Formel 27) folgt nun der

***Satz:*** *Eine Normaloperation endlicher Ordnung ist auch nach dieser Bestimmungsweise eindeutig;* für ganze rationale Funktionen stimmt also der allgemeine Wert mit dem Hauptwerte überein.

Um Formel 27) auf Normaloperationen *endlicher* Ordnung anzuwenden, hat man nämlich nur

$$f_k(x) = \sum_{0}^{k} \nu \; a_{k,\nu} \cdot x^{k-\nu}$$

zu setzen.

Als Mittelpunkt unserer Betrachtungen haben wir den folgenden, auf unserer Definition der Normaloperationen beruhenden Satz zu betrachten:

***Satz:*** *Ist* P *eine eigentliche Normaloperation, so sind alle Funktionen* y, *die der Gleichung*

28.) $$P(y) = z$$

*genügen, und nur diese enthalten in dem Ausdrucke*

(29.) $$y = P^{-1}(z).$$

Dabei ist $P^{-1}$ die nach dem in Abschnitt II angegebenen Verfahren aus der Operation P erhaltene *inverse* Operation, bei deren Bildung nur die Hauptwerte von P und $P^{-1}$ berücksichtigt wurden.

Zum Beweise dieses Satzes halten wir uns stets an unsere Definition der Normaloperationen als Grenzwerte. Es bedeutet

$$P(y) = z$$

nichts anderes, als dass es stets eine Darstellung

$$y = \lim_{n=\infty} y_n$$

von der Beschaffenheit gibt, dass, wenn man

(a.) $$\ldots . P^*(y_n) = z_n$$

setzt

$$\lim_{n=\infty} z_n = z$$

wird, wobei $y_n$ und also auch $z_n$ Funktionen $n^{ten}$ Grades bedeuten. Da nun P eine *eigentliche* Normaloperation sein soll, und $y_n$ und $z_n$ ganze rationale Funktionen sind, so folgt aus Gleichung a) nach dem Satze am Schlusse des Abschnittes II als *einzige* Umkehrung

(b.) $$\ldots . y_n = P^{-1*}(z_n).$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} y_n = y \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} z_n = z$$

und nach unserer Definition des allgemeinen Wertes von Normaloperationen

$$P^{-1}(z) = \lim_{n=\infty} P^{-1*}\left(z_n\right)$$

und somit folgt aus Gleichung b)

$$y = \lim_{n=\infty} y_n = \lim_{n=\infty} P^{-1*}\left(z_n\right) = P^{-1}(z),$$

womit bewiesen ist, dass alle aus Gleichung 28) sich ergebenden Funktionen y im Ausdrucke 29) enthalten sind; und da wir unsere Folgerungen rückwärts durchgehen können, so sind im Ausdrucke 29) auch keine andern Funktionen enthalten.

## V.

Einer *eigentlichen* Normaloperation *endlicher* Ordnung entspricht nun der Differentialausdruck

(30.) $$z = \sum_0^n{}_\mu \sum_0^\mu{}_\nu \, a_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} y^{(\mu)},$$

wo nach 5)

(31.) $$A_{\mu,0} = \sum_0^\mu{}_\omega \frac{\mu!}{(\mu-\omega)!} a_{\omega,0} \gtrless 0$$

ist.

Rechnet man zunächst nach 5) die zur entsprechenden Operation

$$P = \sum_0^n{}_\mu \sum_0^\mu{}_\nu \, a_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} D^\mu$$

gehörenden Parameter $A_{\mu,\nu}$ aus, bildet nach 14) und 15) die *Parameter* der *inversen* Operation $P^{-1}$ und bestimmt nach Formel 6) die Koeffizienten $b_{\mu,\nu}$ ihrer Darstellung

$$P^{-1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu} b_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} D^{\mu},$$

so sind, wie wir gesehen haben, alle Funktionen y, die sich bei gegebenem z aus der Gleichung

(a.) $$P(y) = z$$

bestimmen lassen, im Ausdrucke

(b.) $$y = P^{-1}(z)$$

enthalten. Nach der Bemerkung am Schlusse des III. Abschnittes ist aber Gleichung a) identisch mit Gleichung 30) bei gegebenem z, und Gleichung b) kann in der Form geschrieben werden

(32.) $$y = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \sum_{0}^{\mu}{}_{\nu} b_{\mu,\nu} x^{\mu-\nu} z^{(\mu)}.$$

*Jedes* im Punkte $x = 0$ reguläre Integral y der *Gleichung 30)* ist also im *unendlichen Differentialausdruck 32)* enthalten, dessen Koeffizienten $b_{\mu,\nu}$ mit endlichen Indizes $\mu$ und $\nu$ *rational* aus den Koeffizienten $a_{\mu,\nu}$ unserer Differentialgleichung 30) erhalten werden; und umgekehrt liefert Gleichung 32) *nur* Integrale von Gleichung 30).

Zu beachten ist, dass zur Auswertung des unendlichen Differentialausdruckes 32), wie er hier eingeführt wurde, die Funktion z auf alle möglichen Arten als Grenzwert

$$z = \lim_{n=\infty} z_n$$

darzustellen ist, wo $z_n$ eine ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades bedeutet. Dann hat man die Funktionen $z_n$ in den Aus-

druck 32) einzusetzen, der dann nach endlicher Gliederzahl abbricht, und hierauf ist noch der Grenzwert der so erhaltenen Funktionen $y_n$

$$y = \lim_{n=\infty} y_n$$

zu bestimmen.

Da hier noch kein Mittel angegeben wurde, *wie* man z als Grenzwert so zu schreiben hat, dass Gleichung 32) *überhaupt eine Funktion* und dann ein durch *vorgeschriebene Nebenbedingungen bestimmtes* Integral der Gleichung 30) liefert, so kann man den Ausdruck 32) nur als eine *einheitliche Darstellung* der Integrale der Gleichung 30) auffassen.

Ist irgend eines dieser Integrale y auf eine andere Weise schon gefunden, und will man es *nachträglich* aus der Darstellung 32), die also alle Integrale der Gleichung 30) und nur diese enthält, bestimmen, so hat man nach den in dieser Arbeit niedergelegten Ausführungen die Funktion y auf *beliebige* Weise als Grenzwert ganzer rationaler Funktionen zu schreiben [am einfachsten als Grenzwert der Summe der n ersten Glieder der y darstellenden Potenzreihe für $n = \infty$]; es werde etwa

$$y = \lim_{n=\infty} y_n$$

gesetzt und dann ist auf die $y_n$ der Differentialausdruck auf der linken Seite der Gleichung 30) anzuwenden. Man erhält so eine Reihe von Funktionen $z_n$, die als Grenzwert die Funktion z besitzen. Fasst man dann im Ausdrucke 32) die Funktion z als Grenzwert der so erhaltenen Funktionen $z_n$ auf, so liefert dieser Ausdruck das vorgeschriebene Integral der Gleichung 30).

## VI.

Nach den in dieser Arbeit angeführten Betrachtungen soll nun noch kurz ein Beispiel behandelt werden.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$a_{0,0}y + \left(a_{1,0}x + a_{1,1}\right)y' = z \,, \tag{33.}$$

wo z die an der Stelle $x = 0$ reguläre Potenzreihe

$$z = \sum_{0}^{\infty} r \, c_r \cdot x^r \tag{34.}$$

bedeute. Ferner sollen die Ungleichungen gelten

$$a_{0,0} + \mu \cdot a_{1,0} \gtrless 0 \qquad [\mu = 0, 1, 2, 3 \ldots .] \,. \tag{35.}$$

Ferner soll noch

$$a_{1,1} \gtrless 0 \tag{36.}$$

sein, damit $x = 0$ keine singuläre Stelle der Differentialgleichung ist.

Die Gleichung 33) kann nun geschrieben werden

$$P(y) = z \,, \tag{37.}$$

wo

$$P = a_{0,0} + \left(a_{1,0}x + a_{1,1}\right)D \tag{38.}$$

gesetzt ist.

Die Parameter der Operation P sind nun nach Gleichung 5)

$$A_{k,0} = a_{0,0} + k \cdot a_{1,0} \,, \tag{39.}$$

$$A_{k,1} = k \cdot a_{1,1} \tag{40.}$$

und

$$A_{k,s} = 0 \qquad [s = 2, 3, 4 \ldots .] \,. \tag{41.}$$

Wegen den Ungleichungen 35) ist diese Normaloperation eine eigentliche.

Es soll nun die zu P *inverse* Operation $P^{-1}$ bestimmt werden.

Die Moduln von $P^{-1}$ sind nach 14)

$$B_{k,1} = \frac{1}{a_{0,0} + k \cdot a_{1,0}} \tag{42.}$$

und für die übrigen Parameter gelten die Gleichungen

$$B_{k+r,r} = -\frac{(k+1) \cdot a_{1,1}}{a_{0,0} + k \cdot a_{1,0}} \cdot B_{k+r,r-1} \qquad [r = 1, 2, 3 \ldots] \tag{43.}$$

wie aus Gleichung 15) folgt, wenn man die Werte für die $A_{k,s}$ berücksichtigt.

Aus der Rekursionsformel 43) folgt

$$B_{k+r,r} = \frac{(-1)^r (k+1)(k+2) \cdots (k+r) \cdot a_{1,1}^r}{(a_{0,0} + k a_{1,0})(a_{0,0} + (k+1) a_{1,0}) \cdots (a_{0,0} + (k+r) a_{1,0})} \tag{44.}$$

Setzt man nach 6) diese Werte in die Gleichungen

$$b_{\omega,s} = \sum_{0}^{\omega - s} \lambda (-1)^{\lambda} \frac{(\omega - \lambda)!}{\lambda!} B_{\omega - \lambda, s} \tag{45.}$$

ein, so ist damit die Operation $P^{-1}$ in der Form

$$P^{-1} = \sum_{0}^{\infty} \mu \sum_{0}^{\mu} \nu \; b_{\mu,\nu} x^{\mu - \nu} D^{\mu} \tag{46.}$$

bestimmt.

Es sind nun alle Integrale der Gleichung 33), [die wegen der Bedingung 36) bei $x = 0$ sämtlich regulär sind,] und nur diese in dem Ausdrucke

$$y = P^{-1}(z) \tag{47.}$$

enthalten. Um ein vorgegebenes Integral y zu erhalten, haben wir auf geeignete Weise

(48.) $$z = \lim_{n=\infty} z_n$$

zu setzen, wo $z_n$ durch

(49.) $$z_n = \sum_{0}^{n} r \; c_{r,n} x^r$$

bestimmt ist. Dann ist nach 4)

$$P^{-1*}(z_n) = \sum_{0}^{n} \nu \left| \sum_{\nu}^{n} k \; c_{k,n} B_{k,k-\nu} \right| x^\nu$$

oder wegen 44)

(50.)
$$P^{-1*}(z_n) = \sum_{0}^{n} \nu \sum_{\nu}^{n} k \; c_{k,n} \cdot \frac{(-1)^{k-\nu} \cdot \nu \cdot (\nu+1)(\nu+2) \cdots k \cdot a_{1,1}^{k-\nu}}{\left[a_{0,0}+\nu a_{1,0}\right]\left[a_{0,0}+(\nu+1)a_{1,0}\right] \cdots \left[a_{0,0}+k a_{1,0}\right]} \cdot x^\nu ;$$

endlich ist

(51.) $$y = P^{-1}(z) = \lim_{n=\infty} P^{-1*}(z_n).$$

Nun wollen wir durch diesen Prozess das Integral erhalten, das für

(52.) $$x = 0$$

den Wert

$$y = g$$

besitzt. Um die Darstellung 48) der gegebenen Funktion z als Grenzwert zu erhalten, mittelst deren man durch unsern Prozess dieses Integral erhält, müssen wir das Integral zunächst *auf einem andern Wege* bestimmen.

Setzen wir

$$y = \sum_{0}^{\infty} r \; g_r x^r \tag{53.}$$

an, so ist

$$a_{1,1}(r+1)g_{r+1} + \left(a_{0,0} + r a_{1,0}\right) g_r = c_r \; ; \quad g_0 = g \, , \tag{54.}$$

woraus

(55.)

$$g_r = \sum_{0}^{r-1} \nu (-1)^{\nu} \frac{\left[a_{0,0}+(r-1)a_{1,0}\right]\left[a_{0,0}+(r-2)a_{1,0}\right]\cdots\left[a_{0,0}+(r-\nu)a_{1,0}\right] c_{r-\nu-1}}{r(r-1)(r-2)\cdots(r-\nu)\cdot a_{1,1}^{\nu+1}} +$$

$$+ (-1)^r \frac{\left[a_{0,0}+(r-1)a_{1,0}\right]\left[a_{0,0}+(r-2)a_{1,0}\right]\cdots\left[a_{0,0}+a_{1,0}\right]\cdot a_{0,0}}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_{1,1}^{r}} \cdot g \, .$$

Setzt man nun

$$y_n = \sum_{0}^{n} r \; g_r x^r \, , \tag{56.}$$

so erhält man

$$z_n = P\left(y_n\right) = \sum_{0}^{n-1} r \left[a_{1,1}(r+1)g_{r+1} + \left(a_{0,0} + r \cdot a_{1,0}\right) g_r\right] \cdot x^r + \left(a_{0,0} + n \cdot a_{1,0}\right) g_n x^n$$

oder wegen 54) und 55)

$$z_n = \sum_{0}^{n-1} r \; c_r x^r + c_{n,n} x^n \tag{57.}$$

wobei

$$\left(a_{0,0}+n a_{1,0}\right)\left\{\sum_{0}^{n-1} \nu (-1)^{\nu} \frac{\left[a_{0,0}+(n-1)a_{1,0}\right]\left[a_{0,0}+(n-2)a_{1,0}\right]\cdots\left[a_{0,0}+(n-\nu)a_{1,0}\right]}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)\,a_{1,1}^{\nu+1}} \cdot c_{r-\nu-1}\right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{\left[a_{0,0}+(n-1)a_{1,0}\right]\left[a_{0,0}+(n-2)a_{1,0}\right]\cdots\left[a_{0,0}+a_{1,0}\right]\cdot a_{0,0}}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_{1,1}^{n}} g \right\} = c_{n,n}$$

gesetzt ist.

Da

$$\lim_{n=\infty} y_n = y$$

ist und P eine Normaloperation endlicher Ordnung ist, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} z_n = z .$$

Ist nun in der Darstellung 48) $z_n$ durch die Formel 57) gegeben, so erhält man in 50) für $P^*(z_n)$ den Wert $y_n$ zurück und Formel 51) liefert das der Bedingung 52) genügende Integral der Gleichung 33).

# Vita.

Ich, Emil Göring, heimatberechtigt in Basel, wurde in Basel als Sohn des Joh. Martin Göring, Schneidermeister in Basel und der verstorbenen Maria, geborenen Staiger, am 2. Mai 1884 geboren. Hier wuchs ich auf und besuchte die Primar-, dann die untere Realschule, hierauf die obere Realschule vom Frühjahr 1899 bis zum Herbst 1902, wo ich mir das Reifezeugnis erwarb. Dann bezog ich die hiesige Universität, wo ich vorzugsweise Mathematik, Physik und Chemie studierte und bei der ich bis jetzt immatrikuliert bin.

Mathematische Vorlesungen hörte ich bei Herrn Prof. Dr. *Kinkelin*, Herrn Dr. *Spiess* und Herrn Dr. *Grossmann*, mathematisch-physikalische bei Herrn Prof. Dr. *Von der Mühll*, Physik hörte ich bei Herrn Prof. Dr. *Hagenbach-Bischoff* und bei Herrn Prof. Dr. *Veillon* und Chemie bei Herrn Prof. Dr. *Fichter* und bei Herrn Prof. Dr. *Rupe*. Dabei nahm ich an den mathematischen und den mathematisch-physikalischen Übungen der Herren Prof. Dr. *Kinkelin*, *Von der Mühll* und *Hagenbach-Bischoff* teil und besuchte das chemische und das physikalische Laboratorium der Universität. Ferner beteiligte ich mich an den pädagogischen Vorlesungen und Übungen bei Herrn Prof. Dr. *Heman* und Herrn Dr. *Flatt*. Hierbei bestand ich die basel-städtische Prüfung für Kandidaten des Lehramts in der mittleren Schulstufe. Endlich hörte ich noch philosophische Vorlesungen bei Herrn Prof. Dr. *Joël*.

Meine Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Dr. *Spiess*, dem ich hiermit seine Bemühung herzlich verdanke. Ferner spreche ich noch allen meinen verehrlichen Herrn Lehrern für die Förderung meines Wissens und meiner geistigen Ausbildung den besten Dank aus.

**Emil Göring.**